ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE

Prof. M. Spera

Prova scritta del 15 gennaio 2020

① Sia data la famiglia di superfici in $\mathbb{R}^3$

$$\Sigma_\alpha : \quad f_\alpha = x^2 - y^2 - z^2 - \alpha = 0$$

$\alpha \neq 0$

Determinare una distribuzione involutoria Δ che le ammetta come s.varietà integrali

② Determinare l'algebra di Lie di $SU(n)$

③ In $(\mathbb{R}^2, \omega = dq \wedge dp)$, determinare $\alpha = \alpha(q)$ (liscia) in modo che il campo vettoriale

$$X = \alpha(q) \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p}$$

risulti hamiltoniano.

Tempo a disposizione: 1h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

① $f_\alpha = x^2 - y^2 - z^2 - \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

determinare Δ, distr. involutoria, che ammetta le $f_\alpha = 0$ come 2. varietà integrali

Sol. $df_\alpha = \underbrace{x\,dx - y\,dy - z\,dz}_{\omega} = 0$

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

imponiamo

$\omega(X) = 0$ si ha:

$$\alpha x - \beta y - \gamma z = 0$$

scegliamo $\beta \equiv 0$: $\alpha x - \gamma z = 0$

e $\alpha = z \Rightarrow \gamma = x$

$$X_1 = z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}$$

Successivamente poniamo nel ris. $\gamma = 0$

$\alpha x - \beta y = 0$ e $\alpha = y$, $\beta = x$

$$X_2 = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

$\Rightarrow \Delta = \langle X_1, X_2 \rangle \qquad [X_1, X_2] = \dots - y \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial y}$

controllo $\begin{vmatrix} z & 0 & x \\ y & +x & 0 \\ 0 & +z & -y \end{vmatrix} = -xyz + xyz = 0 \qquad \in \Delta ?$

(2) Determinare l'algebra di Lie di $SU(n)$

$$SU(n) = \{ U \mid U^*U = UU^* = 1, \quad \det U = 1 \}$$

$U = \mathbb{1} + \varepsilon A + o(\varepsilon)$ $\quad \varepsilon \in \mathbb{R}$ piccolo

$U^* = \mathbb{1} + \varepsilon A^* + o(\varepsilon)$

$UU^* = U^*U = 1$ diviene, al prim'ordine

$$A + A^* = 0 \qquad A^* = -A \qquad A \text{ antiherm.}$$

da $\det U = 1$ si trova posto $U = e^{\varepsilon A}$

con $A + A^* = 0$ $\quad 1 = \det e^{\varepsilon A} = e^{\varepsilon \operatorname{tr} A} \Rightarrow \operatorname{tr} A = 0$

(3) In $(\mathbb{R}^2, \omega = dq \wedge dp)$ determinare $\alpha = \alpha(q)$ in modo che

$$X = \alpha(q)\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{sia hamiltoniano}$$

Sol. $\quad d\, i_X \omega = 0$

$$\Rightarrow d[\alpha(q) \wedge dp - dq] = 0$$

$$d\alpha \wedge dp = 0 \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial q} dq \wedge dp = 0$$

oppure:

$$0 = \mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_{\alpha\frac{\partial}{\partial q}}(dq \wedge dp) + \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial p}}(dq \wedge dp) \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial q} \equiv 0 \Rightarrow \alpha = \text{cost}$$

$\parallel$

$$(\mathcal{L}_{\alpha\frac{\partial}{\partial q}} dq) \wedge dp + dq \wedge \underbrace{\mathcal{L}_{\alpha\frac{\partial}{\partial q}}(dp)}_{= d\mathcal{L}_{\alpha\frac{\partial}{\partial q}} p = 0} + \underbrace{(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial p}} dq)}_{=0} \wedge dp + dq \wedge \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial p}} dp$$

$$= d(\mathcal{L}_{\alpha\frac{\partial}{\partial q}} q) \wedge dp \qquad dq \wedge d(\underbrace{\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial p}} p}_{=1})$$

$$= d\alpha \wedge dp + 0 + 0 + 0 = d\alpha \wedge dp \,!!$$