ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE

Prof. M. Spera

Prova scritta del 12 febbraio 2020

(1) Siano, in $\mathbb{R}^3$, $\omega = dx\wedge dy\wedge dz$,

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \qquad \alpha,\beta,\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

calcolare $\mathcal{L}_X \omega$ e interpretare geometricamente la condizione $\mathcal{L}_X \omega = 0$.

(2) Sia G un gruppo di Lie compatto munito di metrica bi-invariante. Sia ∇ la corrispondente connessione di Levi-Civita. Dimostrare che il relativo tensore di curvatura di Riemann è dato da

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{4}\langle [X,Y],[Z,W]\rangle \qquad X,Y,Z,W \in \mathfrak{g}$$

(3) In $\{x>0, y>0, z>0\}$ si consideri la distribuzione $\Delta = \langle X_1, X_2\rangle$, con

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

Si dica se Δ è integrabile, nel qual caso se ne determinino le varietà integrali.

Sugg. Può risultare utile considerare la funzione $\xi = \frac{1}{(x^2+y^2)z}$ come fattore integrante. In alternativa si possono utilizzare coordinate cilindriche

Tempo a disposizione: 1h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) $\mathcal{L}_X \omega = \operatorname{div} X \cdot \omega$

$\operatorname{div} X = 0 \iff F_t^X$ conserva il volume
(prescindendo da sottigliezze analitiche)

(2) Da $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$

si ha

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle = \frac{1}{4}\langle [[X,Y],Z], W\rangle$$

$$= -\frac{1}{4}\langle [Z,[X,Y]], W\rangle = +\frac{1}{4}\langle [X,Y],[Z,W]\rangle$$

(ad-invarianza)

(3) $[X_1, X_2] =$

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$
$$X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$-x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = 0$$: compl. integrabile.

Troviamo le varietà integrali. Innanzitutto determiniamo $\omega \in \Lambda^1$ tale che $\Delta = \ker \omega$ in modo rapido:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}\cdot xz - \underline{j}(-yz) - (x^2+y^2)\underline{k} = xz\,\underline{i} + yz\,\underline{j} - (x^2+y^2)\underline{k}$$

$$\Rightarrow \omega = xz\,dx + yz\,dy - (x^2+y^2)\,dz.$$

A titolo di controllo, si ha $\omega \wedge d\omega = 0$

$$(d\omega = x\,dz\wedge dx + y\,dz\wedge dy - (2x\,dx + 2y\,dy)\wedge dz =$$
$$= x\,dz\wedge dx - y\,dy\wedge dz - 2x\,dx\wedge dz - 2y\,dy\wedge dz$$
$$= 3x\,dz\wedge dx - 3y\,dy\wedge dz$$

$$\omega\wedge d\omega = 3xyz\,dy\wedge dz\wedge dx - 3xyz\,dx\wedge dy\wedge dz = 0$$

Δ : $\omega = 0$

$$xz\,dx + yz\,dy - (x^2+y^2)\,dz = 0$$

Sia $\xi = \dfrac{1}{(x^2+y^2)\cdot z}$ Da $\xi\omega = 0$ si ha

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} - \frac{dz}{z} = 0$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - d\log z = 0$$

$$\frac{1}{2}\,d\log(x^2+y^2) - d\log z = 0$$

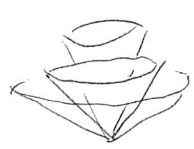
$$d\log\sqrt{x^2+y^2} - d\log z = 0$$

$$d\left(\log\sqrt{x^2+y^2} - \log z\right) = 0$$

$$\log\sqrt{x^2+y^2} - \log z = c$$

$$\log\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = c$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = c_1 z, \qquad c_1 = e^c > 0$$



$z = \rho$