TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

a.a. 2014/15

Prof. M. Spera - UCSC, Brescia

Prova scritta del 25 giugno 2015

① In $\mathbb{R}^2$, sia data la metrica

$$g = dx^2 + a(x,y)\,dy^2 \qquad a \in C^\infty(\mathbb{R}^2),\ a > 0$$

Determinare a in modo che $X = \frac{\partial}{\partial x}$ sia di Killing. Stesso problema per $X = \frac{\partial}{\partial y}$.

Determinare a in modo che g sia invariante per traslazioni.

② Sia dato in $\mathbb{R}^3$ $\quad T = x \sin z \,\frac{\partial}{\partial x} \otimes dy \otimes dz$

Sia $\quad X = y \frac{\partial}{\partial z}$. $\quad$ Calcolare $\mathcal{L}_X T$

③ In $M = \{x > 0, y > 0, z > 0\}$ siano dati i campi vettoriali $\quad X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$, $\quad Y = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}$

Dire se la distribuzione generata da X e Y è integrabile e, in caso affermativo, determinare le sottovarietà integrali.

Tempo a disposizione: 1h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) $g = dx^2 + \lambda(x,y)\, dy^2 \qquad \lambda > 0$

det λ in modo che $X = \frac{\partial}{\partial x}$ sia di Killing

$\mathcal{L}_X dx^2 = \dots 0$

$\mathcal{L}_X g = 0$ occorre e basta che $\mathcal{L}_X(\lambda\, dy^2) = 0$

$\mathcal{L}_X(\lambda\, dy^2) = X(\lambda)\, dy^2 + 0 \Rightarrow X(\lambda) = 0$

$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda(y) > 0$

Stesso problema con $X = \frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow \mathcal{L}_X dx^2 = \dots 0$

È $\lambda = \lambda(x) > 0$

inv. per traslazioni ! $\lambda = C > 0$

② Sia $T = x\sin z \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy \otimes dz$

$X = y\frac{\partial}{\partial z}$ Calcolare $\mathcal{L}_X T$

$$\mathcal{L}_X T = \mathcal{L}_X(x\sin z)\frac{\partial}{\partial x}\otimes dy\otimes dz \; +$$

$$x\sin z \; \underbrace{\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{0}\otimes dy\otimes dz \; +$$

$$x\sin z \; \frac{\partial}{\partial x}\otimes \underbrace{\mathcal{L}_X dy}_{0}\otimes dz \; +$$

$$x\sin z \; \frac{\partial}{\partial x}\otimes dy\otimes \underbrace{\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial z}} dz}_{dy}$$

$\mathcal{L}_X(x\sin z) = y\frac{\partial}{\partial z}(x\sin z) = xy\cos z$

$\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial x} = \left[y\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\right] = 0$

$\mathcal{L}_X dy = d\mathcal{L}_X y = d\left(y\frac{\partial y}{\partial z}\right) = 0$

$\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial z}} dz = d\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial z}} z = d\left(y\frac{\partial z}{\partial z}\right) = dy$

$$= xy\cos z \frac{\partial}{\partial x}\otimes dy\otimes dz + x\sin z\frac{\partial}{\partial x}\otimes dy\otimes dy$$

(3) Siano dati in $\left\{\begin{smallmatrix} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{smallmatrix}\right\}$ i campi vettoriali

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$$

Dire se la distribuzione da questi generata è integrabile e in caso affermativo, determinare le sottovarietà integrali

1° calcoliamo $[X,Y] = \left[x\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial x}\right] - \left[y\frac{\partial}{\partial x}, z\frac{\partial}{\partial x}\right]$
$- \left[x\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial z}\right] + \left[y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}\right]$

$$= -z\frac{\partial}{\partial y} - 0 - 0 + y\frac{\partial}{\partial z} - 0 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$$

ora $\left(\text{se } \begin{smallmatrix} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{smallmatrix}\right)$ X, Y, $[X,Y]$ sono pto per pto l.d.

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ [X,Y] \end{array} \begin{vmatrix} -y & x & 0 \\ z & 0 & -x \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} = +xyz - xyz = 0 \Rightarrow$$ la distr. è integrabile

2° Direttamente troviamo $\omega = 0$ che fornisca la distr.

$$\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

$0 = \omega(X) = bx - ay$

$0 = \omega(Y) = az - cx$

$bx = ya$ $\quad b = \frac{ya}{x}$

$az = cx$ $\quad c = \frac{az}{x}$

poniamo $a = x$ $\Rightarrow$

$$\omega = x\,dx + y\,dy + z\,dz = d\left(\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)\right) \Rightarrow$$

$x^2+y^2+z^2 = \xi$ ${}^{>0}$

porzioni di sfere.