TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE
(ex ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE II)

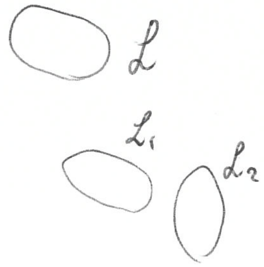
Prof. M. Spera, UCSC, Brescia

Prova scritta del 30 settembre 2016

① Dimostrare che S^{2n} non ammette strutture simplettiche.
(Sugg. $\omega \wedge \dots \wedge \omega$ (n fattori) è una forma di volume)

② (a) Determinare $H^*(S^3 - \mathcal{L})$

(b) Determinare $H^*(S^3 - \underbrace{(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)}_{X})$



Suggerimenti: (a) $S^3 - \mathcal{L} \simeq \mathbb{R}^3 - L$ ← retta

(b) $S^3 = (S^3 - \mathcal{L}_1) \cup (S^3 - \mathcal{L}_2)$

$(S^3 - \mathcal{L}_1) \cap (S^3 - \mathcal{L}_2) = S^3 - (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = X$

③ In $(\mathbb{R}^2, \overset{g}{\overbrace{dx^2 + dy^2}})$, sia dato

$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$. Dire se X è di Killing rispetto a g e se è hamiltoniano rispetto a $\omega = dx \wedge dy$. In caso affermativo si determini un'Hamiltoniana.

Tempo a disposizione: 1h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

(1) Dimostrare che S^{2n} non possiede strutture simplettiche

Sol. Sia ω forma simplettica.

$$[\omega] \in H^2(S^{2n}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = d\alpha$$

$$\alpha \in \Lambda^1(S^{2n})$$

Ma da ciò si ha

$$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \omega}_{n}$$

(che è una forma di volume) poichè ω è non degenere

$$\| $$

$$d\alpha \wedge \underbrace{\chi}_{\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots}_{n-1}} = d(\alpha \wedge \chi) \pm \alpha \wedge \underset{0}{\underset{\|}{d\chi}} = d(\underbrace{\alpha \wedge \chi}_{\beta})$$

$\Rightarrow \omega^n$ è esatta, ma ciò è assurdo:

$$0 \neq \int_{S^{2n}} \omega^n = \int_{S^{2n}} d\beta \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\underset{=0}{\partial S^{2n}}} \beta = 0$$

② (a) Calcolare $H^*(S^3 - \mathcal{L})$

(b) $\qquad = \qquad H^*(S^3 - (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2))$

(a) $\qquad S^3 \setminus \mathcal{L} \approx \mathbb{R}^3 \setminus L \leftarrow$ retta

$$H^*(S^3 \setminus \mathcal{L}) \cong H^*(\mathbb{R}^3 \setminus L) \cong H^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\})$$

$$\cong H^*(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & p=0 \\ \mathbb{R} & p=1 \\ 0 & p=2 \\ 0 & p=3 \end{cases}$$

(b) Sugg: $\qquad S^3 = \underbrace{(S^3 \setminus \mathcal{L}_1)}_{U} \cup \underbrace{(S^3 \setminus \mathcal{L}_2)}_{V}$

e $\quad U \cap V = S^3 \setminus (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) =: X$

$\boxed{H^0 \cong \mathbb{R} \text{ chiaro...}}$ $\qquad$ Applichiamo M-V

$$\to \underset{\overset{\|}{0}}{H^1(S^3)} \to \underset{\overset{\cong}{\mathbb{R}}}{H^1(U)} \oplus \underset{\overset{\cong}{\mathbb{R}}}{H^1(V)} \to H^1(X) \to \underset{\overset{\|}{0}}{H^2(S^3)} \to$$

$\Rightarrow \qquad \boxed{H^1(X) \cong \mathbb{R}^2}$

Ancora:

$$\underset{\overset{\|}{0}}{H^2(S^3)} \to \underset{\overset{\|}{0}}{H^2(U)} \oplus \underset{\overset{\|}{0}}{H^2(V)} \to H^2(X) \to \overset{\mathbb{R}}{\overset{\cong}{H^3(S^3)}}$$

per (a)

$$\to \underset{0}{H^3(S^3 \setminus \mathcal{L}_1)} \oplus \underset{0}{H^3(S^3 \setminus \mathcal{L}_2)}$$

$S^3 - \mathcal{L}_i$ non compatto

per cui

$$0 \longrightarrow H^2(X) \longrightarrow \underset{\mathbb{R}}{\overset{\Vert\wr}{H^3(S^3)}} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H^2(X) \cong \mathbb{R}}$$

infine $\quad H^3(X) \cong 0 \quad$ (perché: X non è compatto)

oppure

$$\underset{0}{\overset{}{\underset{\Vert}{H^3(U)}}} \oplus \underset{0}{\underset{\Vert}{H^3(V)}} \longrightarrow H^3(X) \longrightarrow \underset{0}{\underset{\Vert}{H^4(S^3)}} \longrightarrow$$

da cui $\quad \boxed{H^3 \cong 0}$

③

Sia $(\mathbb{R}^2,\ dx^2+dy^2)$

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

Dire se X è di Killing e se è hamiltoniano rispetto a $dx\wedge dy$ (ovvio a priori)

$$\mathcal{L}_X(dx^2+dy^2) = \mathcal{L}_{x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}}(dx^2+dy^2)$$

$$\mathcal{L}_{x\frac{\partial}{\partial y}}\, dx^2 = d\underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2)}_{=0}$$

$$\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}}\, dy^2 = 0$$

$$\mathcal{L}_{x\frac{\partial}{\partial y}}\, dy^2 = d\left(x\frac{\partial}{\partial y}y\right)dy + dy\,\mathcal{L}_{x\frac{\partial}{\partial y}}dy$$

$$= dx\,dy + dy\,dx = 2\,dx\,dy$$

$$\mathcal{L}_{y\frac{\partial}{\partial x}}\begin{pmatrix} dy^2 \\ dx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2dx\,dy \end{pmatrix}$$

etc. in totale, il segno $-$ in $x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ fornisce il risultato.

$$i_X\omega = i_{x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}}(dx\wedge dy) = i_{x\frac{\partial}{\partial y}}\,dx\wedge dy - i_{y\frac{\partial}{\partial x}}(dx\wedge dy)$$

$$= -x\,dx - y\,dy = -d\left\{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right\} \quad \checkmark$$

$$h = \pm\tfrac{1}{2}(x^2+y^2) + c$$