

# TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

a.a. 2017/18

Prof. M. Spina UCSC Brescia

Prova scritta del 7 giugno 2018

1) Calcolare, in più modi,  $H^*(S^1 \times D^2)$   
circ. disco unitario aperto  
toro solido (aperto)

2) Sia dato, in  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ , il campo vettoriale  
 $(x, y) \equiv z \mapsto z^2 = (x+iy)^2 \equiv X+iY$   
 $\equiv (X, Y)$

Se ne determinano gli zeri e se ne calcola l'indice  
Cosa si troverebbe per  $z \mapsto z^n$  (anf. simile) ?  
 $n \geq 1 \dots$

Tempo a disposizione: 1h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Topogeo 6/6/18

$$\textcircled{1} \quad H^*(S^1 \times D^2) \cong H^*(S^1 \times \mathbb{R}) \cong H^*(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ \mathbb{R} & k=1 \\ 0 & k=2 \\ 0 & k=3 \end{cases}$$

oppure: Künneth

$$H^0(S^1 \times D^2) = H^0(S^1) \otimes H^0(D^2) = \mathbb{R}$$

$$H^1(S^1 \times D^2) = \underbrace{H^1(S^1) \otimes H^0(D^2)}_{\mathbb{R}} \oplus \underbrace{H^0(S^1) \otimes H^1(D^2)}_0 \cong \mathbb{R}$$

$$H^2(S^1 \times D^2) = \underbrace{H^0(S^1) \otimes H^2(D^2)}_0 \oplus \underbrace{H^1(S^1) \otimes H^1(D^2)}_0$$

$$\oplus \underbrace{H^2(S^1) \otimes H^0(D^2)}_0 = 0$$

$$H^3(S^1 \times D^2) = \underbrace{H^0(S^1) \otimes H^3(D^2)}_0 \oplus \underbrace{H^1(S^1) \otimes H^2(D^2)}_0$$

$$\oplus \underbrace{H^2(S^1) \otimes H^1(D^2)}_0 \oplus \underbrace{H^3(S^1) \otimes H^0(D^2)}_0 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad (x+iy)^2 = \overbrace{x^2 - y^2}^X + i \cdot \overbrace{2xy}^Y \quad \begin{matrix} X=Y=0 \\ \Leftrightarrow \\ (x,y) = (0,0) \end{matrix}$$

$$\text{Se } \begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$$

$$X = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$$

$$Y = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

$$i_{(0,0)} = \int_0^{2\pi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \dots = 2$$

in ogni si trova  $i_{(0,0)} = 1$