TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

a.a. 2017/18

Prof. M. Spera, UCSC Brescia

Prova scritta del 13 luglio 2018

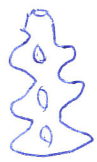
① Dimostrare che $S^1 \times S^3$ non ammette alcuna struttura simplettica

Dire se $S^1 \times S^3 \underset{\text{omt}}{\simeq} S^4$

È $S^1 \times S^3 \underset{\text{diff}}{\cong} \mathbb{CP}^2$?

② Calcolare $H^*(\Sigma_g \setminus \{pt\})$, $g \geq 0$

Sugg: Mayer-Vietoris $U =$ 

$V =$ 

Tempo a disposizione: 1h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

$\boxed{\text{Topogeo} \quad 13/7/18}$

① Calcoliamo

$$H^2(S^1\times S^3) = \underbrace{H^0(S^1)\otimes H^2(S^3)}_{0} \oplus H^1(S^1)\otimes \underbrace{H^1(S^3)}_{0} \oplus \underbrace{H^2(S^1)}_{0}\otimes H^0(S^3) = 0$$

Se esiste ω, $[\omega]\in H^2(S^1\times S^3)$

$\Rightarrow [\omega]=0$ $\quad (\underset{\text{esatta}}{\omega = d\alpha})$

Ma allora $\omega\wedge\omega$ sarebbe pure esatta, e sarebbe una forma di volume sicché

$$\int_{\substack{M=S^1\times S^3\\ \text{(compatta)}}} \omega\wedge\omega \neq 0$$

in contrasto con

$$\int_M d\underbrace{\beta}_{\omega\wedge\omega} = \int_{\partial M} \beta = 0, \qquad \partial M = 0$$

Dato che $H^2(\mathbb{CP}^2)\neq 0$
$S^1\times S^3$ non può essere omeom (quindi diff, a fortiori) a $\mathbb{CP}^2$

Si ha pure $H^1(S^1\times S^3)\cong\mathbb{R}$ (ancora Künneth) ma $H^1(S^4)=\{0\}$ $\Rightarrow$ $S^1\times S^3$ non può essere om (o diff) a S^4.

② $g=0$ $\quad H^*(S^2\setminus\{pt\}) = H^*(\mathbb{R}^2) = \begin{cases}\mathbb{R}\\ 0\\ 0\end{cases}$

$U =$ 

$V =$  $\simeq M$

$U\cup V = \Sigma_g$

$U\cap V =$ 

$$0\to \overset{\mathbb{R}}{H^0(U\cup V)} \to \overset{\mathbb{R}}{H^0(U)}\oplus \overset{\mathbb{R}}{H^0(V)} \to \overset{\mathbb{R}}{H^0(U\cap V)} \xrightarrow{d^*}$$

$$\xrightarrow{d^*} \overset{\mathbb{R}^{2g}}{H^1(U\cup V)} \to \overset{0}{H^1(U)}\oplus \overset{x}{H^1(V)} \to \overset{\mathbb{R}}{H^1(U\cap V)} \xrightarrow{d^*}$$

$$\xrightarrow{d^*} \overset{\mathbb{R}}{H^2(U\cup V)} \to \overset{0}{H^2(U)}\oplus \overset{0}{H^2(V)} \to \overset{0}{H^2(U\cap V)} \to 0$$

$$\underbrace{1-2+1}_{0} - 2g + x \underbrace{-1+1}_{0} = 0$$

$$x = 2g$$

$H^0=\mathbb{R}$
$H^1=\mathbb{R}^{2g}$
$H^2=0$
$\chi = 1-2g$