TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prova scritta del 21 giugno 2019

(1) Dimostrare che $S^2 \times S^2 \not\cong S^4$

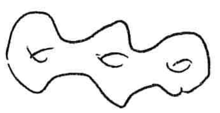
[$S^2 \times S^2$ ammette strutture simplettiche?]
Fac.

(2) In $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, determinare

$\odot$ ◇1 η_{S^2} : duale di Poincaré di $S^2 \subset M$

◇2 η_S, S in figura

Si determini poi $\eta_{S^2 \cap S}$

(3) Dimostrare che se $g \geq 2$, Σ_g (= )

Somma connessa di g tori

non ammette alcuna struttura di gruppo di Lie (compatibile con la sua struttura differenziale)

Tempo a disposizione: 1h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Topogeo 21/7/2019

① Calcoliamo $H^*(S^2 \times S^2)$

$\left[\text{Intanto } H^0 = H^4 = \mathbb{R}\right]$ (d. Poincaré)

Künneth: $H^*(S^2 \times S^2) \cong H^*(S^2) \otimes H^*(S^2)$

$\downarrow$

coom gen da 1 e ω_{S^2} ← forma d'area (grado 2)

$$\Rightarrow \begin{cases} H^0 = \mathbb{R} & 1 \\ H^1 = 0 \\ H^2 = \mathbb{R}^2 & \leftarrow (\pi^*\omega^{(1)}_{S^2}, p^*\omega^{(2)}_{S^2}) \\ H^3 = 0 \\ H^4 = \mathbb{R} & \omega^{(1)}_{S^2} \wedge \omega^{(2)}_{S^2} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & S^2 \times S^2 \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ S^2 & & S^2 \end{tikzcd}$$

$S^2 \times S^2$ ammette $\pi^*\omega^{(1)}_{S^2} + p^*\omega^{(2)}_{S^2}$ come f. simplettica

In maggiore dettaglio

$$H^0 = \underset{\mathbb{R}}{H^0(S^2)} \otimes \underset{\mathbb{R}}{H^0(S^2)} = \mathbb{R}$$

$$H^1 = H^0(S^2) \otimes \underset{\overset{\|}{0}}{H^1(S^2)} + \underset{\overset{\|}{0}}{H^1(S^2)} \otimes H^0(S^2) = 0$$

$$H^2 = \underbrace{\underset{\mathbb{R}}{H^0(S^2)} \otimes \underset{\mathbb{R}}{H^2(S^2)}}_{\mathbb{R}} + \underset{\mathbb{R}}{H^2(S^2)} \otimes \underset{\mathbb{R}}{H^0(S^2)} = \mathbb{R}^2$$

$$H^3 = H^0(S^2) \otimes \underset{\overset{\|}{0}}{H^3(S^2)} + \underbrace{\underset{\overset{\|}{0}}{H^1(S^2)} \otimes H^2(S^2)}_{\overset{\|}{0}} + \underbrace{H^2(S^2) \otimes \underset{\overset{\|}{0}}{H^1(S^2)}}$$

$$+ \underset{\overset{\|}{0}}{H^3(S^2)} \otimes \underset{\mathbb{R}}{H^0(S^2)} = 0$$

$$H^4 = H^0(S^2) \otimes \underset{\overset{\|}{0}}{H^4(S^2)} + H^1(S^2) \otimes \underset{\overset{\|}{0}}{H^3(S^2)} + \underset{\mathbb{R}}{H^2(S^2)} \otimes \underset{\mathbb{R}}{H^2(S^2)} + 0 + 0 \ldots$$

$$\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

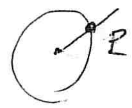
Portanto $H^*(S^2 \times S^2) \neq H^*(S^4) = \begin{cases} H^0 = \mathbb{R} \\ H^1 = H^2 = H^3 = 0 \\ H^4 = \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow S^2 \times S^2 \not\cong S^4$

(2)

$$\eta_{S^2} = \rho(r)\,dr \qquad \int \rho(r)\,dr = 1$$

$$\eta_S = \omega_{S^2}$$



$$\eta_{S^2 \wedge S} = \eta_R = \eta_{S^2} \wedge \eta_S = \rho(r)\,dr \wedge \omega_{S^2}$$

(3) Se $g \geq 2$ è $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g < 0$

Ma per un gruppo di Lie G si ha, in virtù di Poincaré-Hopf, $\chi(G) = 0$ □